

# An improved error estimate for finite volume approximations of the Richards equation

日本女子大学大学院 理学研究科 数理・物性構造科学専攻  
森村晃子 (Akiko MORIMURA) \*

## 概要

Richards 方程式は、多孔質媒体内の水分移動を記述する代表的な方程式の一つであり、質量保存則と Darcy 則から導かれる拡散方程式である。本研究で扱う Richards 方程式は、含水率が未知関数に依存するため、時間微分項が非線形であるという特徴を持つ。筆者の以前の研究では、この方程式の初期値境界値問題に対する強解の存在と一意性を示し、有限体積法に基づく近似解の誤差評価も導出した。本稿では、この誤差評価の改良について報告する。なお、本稿は愛木豊彦教授（日本女子大学）と荏原製作所との共同研究に基づく。

## 1 導入

多孔質媒体とは、微小な孔が多数空いた構造をもつ物質である。このような物質は日常生活においても身近に存在し、岩石やスポンジ、コンクリート、土壌などが具体例として挙げられる。多孔質媒体は構造が複雑であるため、その内部に浸透する水の流れは通常（パイプ中など）とは異なる。このような現象を記述する数理モデルは、これまでにいくつか提案されている [1, 5, 10]。本研究では、多孔質媒体の一つであるレンガに水が浸透していく様子を記述する数理モデルを取り扱う。

Fukui–Iba–Hokoi–Ogura [4] は、レンガへの水分浸透実験を行い、その結果を Green–Dabiri–Weinaug–Prill [6] が提唱した数理モデル（GDWP モデル）の数値シミュレーション結果と比較することで、実験的観点から GDWP モデルの妥当性を明らかにした。GDWP モデルでは、水だけでなく空気の流れも記述する。Fukui らはレンガ内部の水の浸透と空気圧の関係を考えるために、本モデルを採用した。

以下では、Fukui らによる実験の設定を説明する。まず、一定の温度および湿度が保たれた実験室内において、乾いたレンガを用意する。レンガの上面を除く全ての面に断湿処理を施し、上面には水層を設置する。このとき、時間経過によってレンガ内部に水が浸透し、同時にレンガ内部の空気が外部へ排出される。水の浸透と共にレンガ上面の水量は減少するが、Fukui らは水層の高さが一定に保たれるよう水を注ぎ続けた。また、浸透実験中、空隙率（多孔質媒体中の単位体積あたりの孔の割合）は時間に対して不変であると仮定した。

---

\* E-mail:m1716096ma@ug.jwu.ac.jp

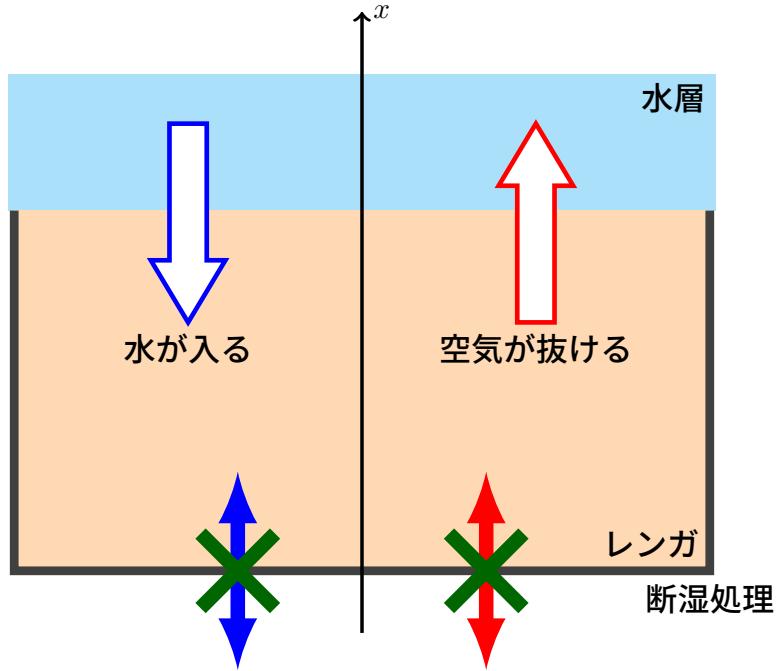


図 1 レンガの水分浸透実験

GDWP モデルは本来多次元モデルであるが, Fukui らは空間の水平方向の変化が一様であると仮定し, 空間 1 次元モデルとして数値シミュレーションを行った. その際に用いられた GDWP モデルは次の初期値境界値問題である:

$$\partial_t m_w(u) + \partial_x q_w = 0, \quad \partial_t m_a(u) + \partial_x q_a = 0, \quad (1)$$

$$q_w = -\lambda(\psi_w(u))(\partial_x P_w + \rho_w g), \quad q_a = -k(\psi_w(u))(\partial_x P_a + \rho_a g), \quad (2)$$

$$q_w(t, 0) = 0, \quad q_a(t, 0) = 0, \quad (3)$$

$$q_w(t, 1) = C_w(P_w(t, 1) - \hat{P}_w), \quad q_a(t, 1) = C_a(P_a(t, 1) - \hat{P}_a), \quad (4)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad m_a(0, x) = m_{a0}(x), \quad (5)$$

$$P_a - P_w = -\rho_w u, \quad P_a = \rho_a R T, \quad \psi_w + \psi_a = \phi, \quad m_w = \rho_w \psi_w, \quad m_a = \rho_a \psi_a. \quad (6)$$

ここで,  $u$  は水分化学ポテンシャル;  $m_w, m_a$  は水と空気の質量;  $q_w, q_a$  は水と空気の流束;  $\psi_w, \psi_a$  は水と空気の含有率;  $\lambda, k$  は水と空気の拡散係数;  $P_w, P_a$  は水と空気の圧力;  $\rho_w, \rho_a$  は水と空気の密度を表す. さらに,  $\rho_w$  は定数であると仮定する. また,  $g, R, T, \phi, C_w, \hat{P}_w, C_a, \hat{P}_a$  は与えられた正定数である.

GDWP モデルの未知関数は水分化学ポテンシャル  $u$  と空気の質量  $m_a$  である. 時間発展の支配方程式は質量保存則 (1) であり, 流束は Darcy 則 (2) に従う. 含水率  $\psi_w$ , 水の拡散係数  $\lambda$ , 空気の拡散係数  $k$  は, Fukui らによって次の具体形が提案されている:

$$\psi_w(u) := \frac{0.0505}{8 + \exp\{\log_{10}(-u) - 2\}} + \frac{0.139}{1.1 + \exp\{2.3 \log_{10}(-u) - 4.6\}},$$

$$\lambda(\psi_w) := D_w(\psi_w)\psi'_w,$$

$$D_w(\psi_w) := \frac{30.332 \times 10^{-6}}{\rho_w} \exp\{79.8 \times (\psi_w)^{1.5}\},$$

$$k(\psi_w) := \frac{2.363 \times 10^{-11}}{\rho_w} \left\{ 1 - \left( \frac{\psi_w}{\phi} \right)^2 \right\}.$$

ここで、含水率  $\psi_w$  は  $u < 0$  に対して定義されていることに注意する。

式 (3) と式 (4) はそれぞれレンガ下面  $x = 0$ , レンガ上面  $x = 1$  における境界条件であり、レンガ下面では流束が 0, レンガ上面では流束が圧力差に比例すると仮定している。また、初期条件 (5) としてレンガが乾燥している状態を考えている。他にも、式 (6) で毛管圧の定義式や乾燥気体の状態方程式を与えていている。

Fukui らの検証によって GDWP モデルの実験的妥当性は示されているが、GDWP モデルに対する解の存在やその挙動といった数学的基礎理論は十分に整備されていないのが現状である。数学的な理論解析を行うためには、非線形関数が多数含まれていることや、空気の拡散係数が水分化学ポテンシャル  $u$  に依存していることなど、多くの困難がある。そこで本研究では、GDWP モデルに対する数学的基礎理論を確立するための第一段階として、水の拡散方程式に焦点を当てた解析を行う。

質量保存則 (1) の第一式に流束 (2) の第一式を代入すると、次の水の拡散方程式が得られる：

$$\partial_t m_w = \partial_x (\lambda_w(\psi_w)(\partial_x P_w + \rho_w g)). \quad (7)$$

式 (7) は Richards 方程式として知られており、多孔質媒体中の水分輸送を記述する方程式としてこれまで数多く研究されてきた [2, 3, 7, 9]。

一般的な Richards 方程式は次の形で表される：

$$\partial_t \psi = \partial_x (D(\psi) \partial_x \psi).$$

ここで、 $\psi$  は含水率を表す未知関数、 $D = D(\psi)$  は拡散係数を表す与えられた関数である。

[3, 9] による実験的研究から、拡散係数  $D(\psi)$  は  $\psi$  が小さい領域ではほぼ 0 であるが、 $\psi$  がある閾値を超えると急激に増加することが知られている（図 2 を参照）。

未知関数として  $u$  の代わりに  $\psi_w$  を考えると、式 (7) は次の形に書き換えられる：

$$\partial_t \psi_w = \partial_x (D_w(\psi_w)(\partial_x \psi_w + (\text{remainder}))). \quad (8)$$

[4] は、図 2 に示される特性と同様の挙動をもつように、拡散係数  $D_w$  を具体的に定めた。実際、図 3 より、Fukui らの拡散係数  $D_w$  は図 2 と同様のグラフを持つことが確認できる。

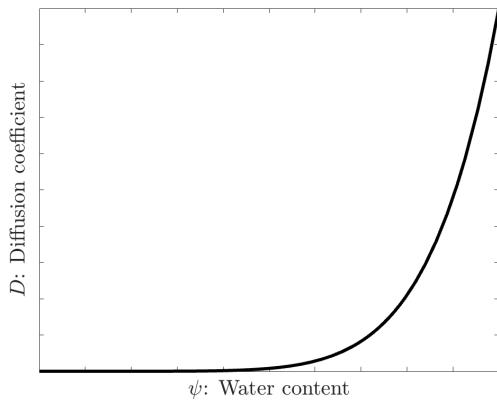


図 2 拡散係数  $D$

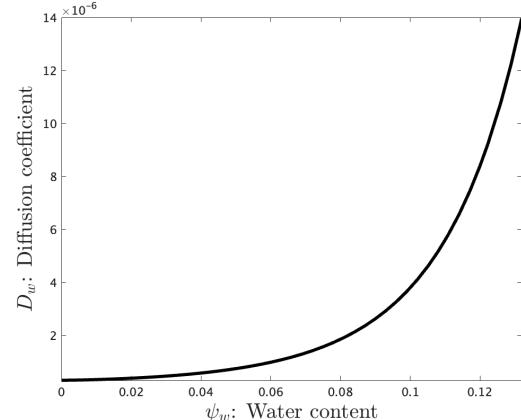


図 3 拡散係数  $D_w$

のことから、水の拡散方程式(7)は、単体の方程式としても、多孔質媒体への水分浸透を記述することが期待される。

## 2 先行研究

### 2.1 問題設定

簡単のため、式(7)中の重力項を除き、レンガの上面および下面の両方に流束が0となる境界条件を課して一般化をすると、次の非線形放物型偏微分方程式の初期値境界値問題が得られる：

$$\partial_t \psi(u) = \partial_x (\lambda(u) \partial_x (u + P)) \quad \text{in } (0, T) \times (0, 1), \quad (9)$$

$$\lambda(u) \partial_x (u + P) = 0 \quad \text{at } x = 0, 1 \text{ and for } t \in (0, T), \quad (10)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{for } x \in (0, 1), \quad (11)$$

ここで、 $T > 0$ ,  $u: [0, T] \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  は未知関数、 $\psi, \lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P: (0, T) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_0: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  は既知関数である。また、 $P(t, x) := P_a(t, x)/\rho_w$  である。

初期値境界値問題(9)–(11)に対し、次の変換を導入する：

$$v := \hat{\lambda} \circ u, \quad v_0 := \hat{\lambda} \circ u_0, \quad p := \partial_x P, \quad h := \psi \circ \hat{\lambda}^{-1}, \quad b := \lambda \circ \hat{\lambda}^{-1},$$

ただし、

$$\hat{\lambda}(u) := \int_0^u \lambda(r) dr$$

とする。

この変換のもとで、初期値境界値問題(9)–(11)は、次の形に形式的に書き換えられる：

$$\begin{cases} \partial_t h(v) = \partial_x (\partial_x v + b(v)p), & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \partial_x v + b(v)p = 0, & (t, x) \in (0, T) \times 0, 1, \\ v(0, x) = v_0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (\text{P})$$

ここで、 $T > 0$ ,  $v: [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  は未知関数、 $h, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v_0: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p: (0, T) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  は既知関数である。

### 2.2 強解の存在と一意性

この問題に対して、M.-Aiki [8] では、 $h$  と  $b$  に次の仮定(A1)を課した上で強解の存在と一意性を示した。

**仮定(A1)**  $h, b \in C^2(\mathbb{R})$  であり、ある正定数  $c_{h,1}, c_{h,2}, c_{b,1}, c_{b,2}$  が存在して

$$c_{h,1} \leq h' \leq c_{h,2}, \quad |h''| \leq c_{h,2}, \quad c_{b,1} \leq b \leq c_{b,2}, \quad |b'| \leq c_{b,2}, \quad |b''| \leq c_{b,2}$$

が成り立つ。

命題 1 ([8]).  $T > 0$  とし, (A1) および

$$v_0 \in H^1(0, 1), \quad p \in W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^1(0, 1))$$

を仮定する. このとき, (P) には強解

$$v \in W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^\infty(0, T; H^1(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^2(0, 1))$$

がただ一つ存在する.

### 2.3 有限体積法による近似解の構成と誤差評価

M.-Aiki [8] では, 有限体積法によって (P) の近似解を構成し, 近似解と命題 1 で与えられる (P) の強解の差に対する誤差評価も導出した. この結果を述べるための準備として, 本研究で用いる有限体積法の枠組みをまとめておく.

まず,  $n \geq 3$  を区間  $[0, 1]$  の分割数,  $\Delta x^{(n)} = 1/n$  を空間分割幅とする. また, 区間  $[0, 1]$  の分割  $\{V_i^{(n)}\}_i$  を次のように定義する:

$$V_i^{(n)} := \begin{cases} [(i-1)\Delta x^{(n)}, i\Delta x^{(n)}), & i = 1, \dots, n-1, \\ [(n-1)\Delta x^{(n)}, 1], & i = n. \end{cases}$$

次に, 問題 (P) の第一式の両辺を  $V_i^{(n)}$  上で積分すると, 次の常微分方程式系を得る:

$$h'(v_i^{(n)}) \frac{d}{dt} v_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x^{(n)}} \left( \frac{v_2^{(n)} - v_1^{(n)}}{\Delta x^{(n)}} + b \left( \frac{v_1^{(n)} + v_2^{(n)}}{2} \right) p_1^{(n)} \right), & i = 1, \\ \frac{1}{\Delta x^{(n)}} \left( \frac{v_{i+1}^{(n)} - v_i^{(n)}}{\Delta x^{(n)}} + b \left( \frac{v_i^{(n)} + v_{i+1}^{(n)}}{2} \right) p_i^{(n)} \right. \\ \left. - \left( \frac{v_i^{(n)} - v_{i-1}^{(n)}}{\Delta x^{(n)}} + b \left( \frac{v_{i-1}^{(n)} + v_i^{(n)}}{2} \right) p_{i-1}^{(n)} \right) \right), & i = 2, \dots, n-1, \\ -\frac{1}{\Delta x^{(n)}} \left( \frac{v_n^{(n)} - v_{n-1}^{(n)}}{\Delta x^{(n)}} + b \left( \frac{v_{n-1}^{(n)} + v_n^{(n)}}{2} \right) p_{n-1}^{(n)} \right), & i = n. \end{cases} \quad (12)$$

ただし,  $v_i^{(n)} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  は未知関数,

$$p_i^{(n)}(t) := \frac{1}{\Delta x^{(n)}} \int_{V_i^{(n)}} p(t, x) dx$$

である. この常微分方程式系に次の初期条件を課した初期値問題を  $(OP)^{(n)}$  と表す:

$$v_i^{(n)}(0) = v_{0,i}^{(n)} := \frac{1}{\Delta x^{(n)}} \int_{V_i^{(n)}} v_0(x) dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

初期値問題  $(OP)^{(n)}$  の解  $(v_1^{(n)}, \dots, v_n^{(n)})$  を用いて, (P) の近似解  $v^{(n)}$  を

$$v^{(n)}(t, x) := \sum_{i=1}^n v_i^{(n)}(t) \chi_i^{(n)}(x) \quad (13)$$

と定義する. ただし,  $\chi_i^{(n)}$  は  $V_i^{(n)}$  の特性関数である.

以上の準備のもと, 近似解  $v^{(n)}$  と命題 1 で与えられる (P) の強解  $v$  の差に対して次の誤差評価が成り立つ.

**命題 2** ([8]).  $n$  を  $n \geq 3$  なる自然数,  $v$  を命題 1 で与えられる (P) の強解,  $v^{(n)}$  を式 (13) で定義される (P) の近似解とする. このとき,  $n$  に依存しない  $c_T > 0$  が存在して

$$|v - v^{(n)}|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 + \int_0^T |\partial_x v(t, \cdot) - D_x v^{(n)}(t, \cdot)|_{L^2(\Delta x^{(n)}, 1)}^2 dt \leq c_T (\Delta x^{(n)})^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ. ただし,

$$D_x v^{(n)}(t, x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \Delta x^{(n)}, \\ \frac{v^{(n)}(t, x) - v^{(n)}(t, x - \Delta x^{(n)})}{\Delta x^{(n)}}, & \Delta x^{(n)} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

である.

### 3 主結果

本稿では, 既知関数  $h, b, v_0, p$  により強い仮定を課すことで, (P) の強解の正則性を向上させ, 命題 2 で得られた誤差評価が改良できることを報告する.

**仮定 (A2)**  $h \in C^3(\mathbb{R})$ ,  $b \in C^2(\mathbb{R})$  であり, ある正定数  $C_{h,1}, C_{h,2}, C_{b,1}, C_{b,2}$  が存在して

$$\begin{aligned} |h| \leq C_{h,2}, \quad C_{h,1} \leq h' \leq C_{h,2}, \quad |h''| \leq C_{h,2}, \quad |h'''| \leq C_{h,2}, \\ C_{b,1} \leq b \leq C_{b,2}, \quad C_{b,1} \leq b' \leq C_{b,2}, \quad |b''| \leq C_{b,2} \end{aligned}$$

が成り立つ.

ここで, (A2)  $\Rightarrow$  (A1) が成り立つことに注意する.

**定理 3.**  $T > 0$  とし, (A2) および

$$v_0 \in W^{3,2}(0,1), \quad p \in W^{1,2}(0,T;L^2(0,1)) \cap L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(0,1)) \cap L^2(0,T;H^1(0,1))$$

を仮定する. このとき, 命題 1 で与えられる (P) の強解  $v$  は

$$\partial_t v \in L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H^1(0,1))$$

を満たす.

**定理 4.** 定理 3 と同じ仮定のもと,  $n$  を  $n \geq 3$  なる自然数,  $v$  を命題 1 で与えられる (P) の強解,  $v^{(n)}$  を式 (13) で定義される (P) の近似解とする. このとき,  $n$  に依存しない  $C_T > 0$  が存在して

$$|v - v^{(n)}|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))}^2 + \int_0^T |\partial_x v(t, \cdot) - D_x v^{(n)}(t, \cdot)|_{L^2(\Delta x^{(n)}, 1)}^2 dt \leq C_T \Delta x^{(n)}$$

が成り立つ.

## 4 主定理の証明

### 4.1 定理 3 の証明

まず,  $\Delta t > 0$ ,  $w(t, x) := h(v(t, x))$ ,  $\delta_t w(t, x) := (w(t, x) - w(t - \Delta t, x))/\Delta t$  とおく. (P) の第一式より従う

$$\delta_t(\partial_t w)(t, x) = \delta_t(\partial_x^2 h^{-1}(w))(t, x) + \delta_t(\partial_x(b(h^{-1}(w))p))(t, x) \quad (14)$$

の両辺に  $\delta_t w(t, x)$  をかけて積分すると,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |\delta_t w(t, x)|^2 dx = - \int_0^1 (\delta_t(\partial_x h^{-1}(w))(t, x) + \delta_t(b(h^{-1}(w))p)(t, x)) \delta_t(\partial_x w)(t, x) dx. \quad (15)$$

(i)  $\Delta t < t < T$  の場合

式 (15) の左辺を計算すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta_t(\partial_x h^{-1}(w))(t, x) \delta_t(\partial_x w)(t, x) dx - \int_0^1 \delta_t(b(h^{-1}(w))p)(t, x) \delta_t(\partial_x w)(t, x) dx \\ & \leq -\frac{1}{4C_{h,2}} |\delta_t(\partial_x v)(t)|_{L^2(0,1)}^2 + 2C_{h,2} \int_0^1 |\partial_x w(t, x)|^2 |\delta_t((h^{-1})'(w))(t, x)| dx \\ & \quad + 2C_{h,2} \int_0^1 |\delta_t(b(h^{-1}(w)))(t, x)|^2 dx \\ & =: -\frac{1}{4C_{h,2}} |\delta_t(\partial_x v)(t)|_{L^2(0,1)}^2 + I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Gagliardo–Nirenberg の不等式より,

$$\begin{aligned} I_1 & \leq \frac{1}{8C_{h,2}} |\delta_t(\partial_x v)(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{32C_{h,2}^4}{C_{h,1}^6} |\partial_x w(t)|_{L^4(0,1)}^4 |\delta_t w(t)|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \quad + \frac{4C_{h,2}^3}{C_{h,1}^6} |\partial_x w(t)|_{L^4(0,1)}^2 |\delta_t w(t)|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

仮定 (A2) より,

$$I_2 \leq \frac{4C_{h,2}C_{b,2}|p|_{L^\infty(0,T;L^\infty(0,1))}}{C_{h,1}} |\delta_t w(t)|_{L^2(0,1)}^2 + 4C_{h,2}C_{b,2}^2 |\delta_t p(t)|_{L^2(0,1)}^2.$$

以上より, 次の評価を満たす正定数  $C > 0$  が存在する:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 |\delta_t w(t, x)|^2 dx + |\delta_t(\partial_x v)(t)|_{L^2(0,1)}^2 \leq C(F(t)|\delta_t w(t)|_{L^2(0,1)}^2 + |\delta_t p(t)|_{L^2(0,1)}^2).$$

ただし,

$$F(t) = |\partial_x w(t)|_{L^4(0,1)}^4 + 1.$$

(ii)  $0 < t < \Delta t$  の場合

(i) と同様の計算をするために,  $t < 0$  のときの  $w(t, x), p(t, x)$  を

$$\begin{aligned} w(t, x) &:= w_0(x) + t\partial_x q_0(x), \\ q_0(x) &:= \partial_x h^{-1}(w_0(x)) + b(h^{-1}(w_0(x)))p(0, x), \\ p(t, x) &:= p(0, x) \end{aligned} \quad (16)$$

とおく. ただし,  $w_0(x) := h(v_0(x))$ . また,  $\delta_t^0$  を

$$\delta_t^0 w(t, x) := \frac{(w(t, x) - w_0(x))}{\Delta t}$$

と定義する. 式 (16) より, 式 (15) は次のように書き換えることができる:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |\delta_t w(t, x)|^2 dx \\ &= - \int_0^1 \delta_t^0 (\partial_x h^{-1}(w) + b(h^{-1}(w))p)(t, x) \delta_t^0 (\partial_x w)(t, x) \\ &\quad + \frac{\Delta t - t}{\Delta t} \int_0^1 \partial_x^2 q_0(x) \delta_t^0 (\partial_x h^{-1}(w) + b(h^{-1}(w))p)(t, x) dx \\ &=: I_3 + I_4. \end{aligned}$$

(i) の  $I_1, I_2$  と同様に計算すると,

$$\begin{aligned} I_3 &\leq -\frac{1}{8C_{h,2}} |\delta_t^0 (\partial_x v)(t)|_{L^2(0,1)}^2 + CF(t) |\delta_t^0 w(t)|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\quad + C |\delta_t p(t)|_{L^2(0,1)}^2 + C \int_0^1 \left| \frac{p(t - \Delta t) - p(0, x)}{\Delta t} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

また,  $I_4$  は仮定 (A2) より次のように評価できる:

$$I_4 \leq -\frac{1}{16C_{h,2}} |\delta_t^0 (\partial_x v)(t)|_{L^2(0,1)}^2 + CF(t) |\delta_t^0 w(t)|_{L^2(0,1)}^2 + C.$$

ここで,

$$|\delta_t \partial_x w(t, x)| \leq |\delta_t^0 (\partial_x w)(t, x)| + |\partial_x^2 q_0(x)|$$

であることに注意して計算をすると,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_0^1 |\delta_t w(t, x)|^2 dx + |\delta_t (\partial_x v)(t)|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq C \left( F(t) |\delta_t w(t)|_{L^2(0,1)}^2 + F(t) + |\delta_t p(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^1 \left| \frac{p(t - \Delta t) - p(0, x)}{\Delta t} \right|^2 dx \right). \quad (17) \end{aligned}$$

(i) で得られた評価より, 式 (17) は任意の  $t \in (0, T)$  に対して成り立つ. したがって, Gronwall の不等式より次の  $\Delta t$  に関する一様評価が得られる.

$$\sup_{t \in (0,1)} |\delta_t w(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^T |\delta_t (\partial_x w)(t)|_{L^2(0,1)}^2 dt \leq C.$$

この一様評価を用いて,  $\Delta t$  の部分列をとり,  $\delta_t w$  と  $\delta_t(\partial_x w)$  の極限を考えることによって

$$\partial_t v \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^1(0, 1)).$$

が導かれる.

## 4.2 定理 4 の証明

関数  $W^{(n)}$  を次で定める:

$$W^{(n)}(t, x) := h'(v^{(n)}(t, x))\partial_t v^{(n)}(t, x).$$

式 (12) より, 以下の式が得られる:

$$\partial_t W^{(n)}(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} F_i^{(n)}(t) \chi_i^{(n)}(x).$$

この式の両辺に  $W^{(n)}(t, x)$  をかけて積分し計算をすると, 次の  $n$  に関する一様評価が得られる:

$$\sup_{t \in (0, 1)} |W^{(n)}(t)|_{L^2(0, 1)}^2 + \int_0^T |D_x W^{(n)}(t)|_{L^2(0, 1)}^2 dt \leq C.$$

また, [8] より  $D_x v^{(n)}$  の  $n$  に関する一様評価が成り立つ:

$$\sup_{t \in (0, 1)} |D_x v^{(n)}(t)|_{L^2(0, 1)}^2 \leq C.$$

式 (12) を変形して計算すると, 任意の  $n \geq 3$  と  $t \in [0, T]$  に対して

$$\left| \frac{D_x v(t, \cdot + \Delta x^{(n)}) - D_x v(t, \cdot)}{\Delta x^{(n)}} \right|_{L^2(\Delta x^{(n)}, 1 - \Delta x^{(n)})} \leq 2|W^{(n)}(t)|_{L^2(0, 1)}^2 + C|D_x v^{(n)}(t)|_{L^2(0, 1)}^2 + C.$$

ここで, 任意の  $i, j = 0, \dots, n$  に対し,

$$|D_x v^{(n)}(t, i\Delta x^{(n)})| \leq \left| \frac{D_x v(t, \cdot + \Delta x^{(n)}) - D_x v(t, \cdot)}{\Delta x^{(n)}} \right|_{L^2(\Delta x^{(n)}, 1 - \Delta x^{(n)})} + |D_x v^{(n)}(t, j\Delta x^{(n)})|.$$

この式の両辺に  $\Delta x^{(n)}$  をかけ,  $j$  に関して和を取ると任意の  $i = 0, \dots, n$  に対して

$$|D_x v^{(n)}(t, i\Delta x^{(n)})| \leq C|D_x v^{(n)}(t)|_{L^2(0, 1)}^2 + C.$$

したがって, 次の評価が得られる:

$$|D_x v^{(n)}|_{L^\infty(0, T; L^\infty(0, 1))} \leq C.$$

この評価と, 定理 3 を組み合わせることで, 定理 4 が示される.

## 参考文献

- [1] D.G. Aronson, The porous medium equation, Nonlinear diffusion problems, Lecture notes in mathematics, **1224**(1985), pp. 1–46.
- [2] M. Berardi, F. V. Difonzo, *Strong solutions for Richards' equation with Cauchy conditions and constant pressure gradient*, Environ. Fluid Mech. **20**(2020), 165–174.
- [3] C. Evangelides, G. Arampatzis, C. Tzimopoulos, *Estimation of Soil Moisture Profile and Diffusivity Using Simple Laboratory Procedures*, Soil Science, **175**(3), 118–127.
- [4] K. Fukui, C. Iba, S. Hokoi, D. Ogura, *Effect of air pressure on moisture transfer inside porous building materials*, J. Environ. Eng., AIJ, **83**(2018), 39–47.
- [5] C. Gavioli, P. Krejčí, *Phase transitions in porous media*, Nonlinear Differ. Equ. Appl., **29**(2022), 72.
- [6] D. W. Green, H. Dabiri, C. F. Weinaug, R. Prill, *Numerical modeling of unsaturated ground-water flow and comparison of the model to a field experiment*, Water Resources Research, **6**(1970), 862–874.
- [7] W. Merz, P. Rybka, *Strong solutions to the Richards equation in the unsaturated zone*, J. Math. Anal. Appl., **371**(2010), 741–749.
- [8] A. Morimura, T. Aiki, *An initial-boundary value problem describing moisture transport in porous media: existence of strong solutions and an error estimate for a finite volume scheme*, submitted. [arXiv: 2511.10378]
- [9] Y. A. Pachepsky, D. J. Timlin, W. J. Rawls, *Generalized Richards' equation to simulate water transport in unsaturated soils*, Journal of Hydrology, **272**(2003), 3–13.
- [10] A. Suzuki, Y. Niibori, S. A. Fomin, V. A. Chugunov, T. Hashida, *Analysis of Water Injection in Fractured Reservoirs Using a Fractional-Derivative-Based Mass and Heat Transfer Model*, Math. Geosci., **47**(2015), pp. 31–49.